

## ♠ 1 广义函数基本理论

广义函数是基本函数空间上的连续线性泛函. 本课程中考虑的基本函数空间有  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\mathcal{S}(\Omega)$ . 基本函数空间中的函数又称为试验函数.

### § 1.1 基本空间

#### 定义 1.1.1 (紧支集光滑函数空间)

设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  为开集. 记  $C_0^\infty(\Omega)$  为具有紧支集的定义于  $\Omega$  上的光滑函数的空间. 此处“有紧支集”意为函数  $f$  的支集

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

为紧集. “光滑”意为函数  $f$  任意阶可微. 函数列  $\{\varphi_n\}$  在  $C_0^\infty(\Omega)$  中趋于 0 是指:

1. 存在紧集  $K \subset \Omega$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{supp } \varphi_n \subset K$ .
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$  固定,  $\partial_x^\alpha \varphi_n(x)$  (关于  $x \in \Omega$ ) 一致趋于 0.

赋予上述归纳极限拓扑 (即 (LF)-space) 后记为  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

#### 定义 1.1.2 (光滑函数空间)

空间  $\mathcal{E}(\Omega)$  是对  $C^\infty(\Omega)$  空间赋予以下收敛性:  $\varphi_j \rightarrow 0$  于  $\mathcal{E}(\Omega)$  中即对任意紧  $K \subset \Omega$  和任意  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $\sup_K |D^\alpha \varphi_j| \rightarrow 0$ .

### § 1.2 函数磨光化

#### 定义 1.2.1 (磨光核)

取  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , 满足  $\text{supp } g \subset B(0, 1)$ , 且  $c = \int g(x) dx \neq 0$ . 作  $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{c\varepsilon^n} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ , 则

1.  $\int \varphi_\varepsilon dx = 1$
2.  $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$
3.  $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

称这样的  $\varphi_\varepsilon$  为磨光核. 设  $f$  连续, 定义

$$f_\varepsilon(x) = (f * \varphi_\varepsilon)(x) = \int f(y) \varphi_\varepsilon(x - y) dy$$

称为  $f$  的磨光化. 上述积分有意义, 因为  $\varphi_\varepsilon$  有紧支集, 且  $f, \varphi_\varepsilon$  连续.

**例** 上述定义中的函数  $g$  可取为

$$j_1 = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

不难验证  $\text{supp } j_1 = B(0, 1)$ , 且  $\int j_1 dx > 0$ .

下面考虑磨光后的函数. 设  $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ , 即  $\text{supp } f = K$  为紧集. 令

$$f_\varepsilon = J_\varepsilon f = f * \varphi_\varepsilon,$$

则

1.  $f_\varepsilon$  定义良好: 因为实际上  $f_\varepsilon(x) = \int_K f(y) \varphi_\varepsilon(x-y) dy$ , 被积项连续, 而积分区域为紧集.

2.  $f_\varepsilon$  光滑: 对  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ ,

$$\partial_x^\alpha f_\varepsilon(x) = \int_K f(y) \partial_x^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y) dy,$$

上式因  $\varphi_\varepsilon$  任意阶可微而有意义.

3.  $f_\varepsilon$  有紧支集:  $f_\varepsilon(x)$  仅依赖于  $f$  在  $B(x, \varepsilon)$  上的值, 故在  $\{x : d(x, K) > \varepsilon\}$  处为 0.

综上,  $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , 即实现了  $C_0(\mathbb{R}^n)$  到  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  的转化. 由此可定义磨光算子

$$J_\varepsilon : C_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$f \mapsto f_\varepsilon.$$

## 注解

常用  $K_\varepsilon$  记集合  $\{x \in \Omega : d(x, K) < \varepsilon\}$ .

## 定理 1.2.2

$f \in C^k(\Omega)$ .  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  为开集. 则对任一紧集  $K \subset \Omega$ , 对  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| \leq k$ , 有

$$\sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha f(x) - \partial_x^\alpha f_\varepsilon(x)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0,$$

从而  $\partial_x^\alpha f_\varepsilon$  一致收敛收敛到  $\partial_x^\alpha f$  (当  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ).

**证明** 因  $K \subset\subset \Omega$ , 故存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使  $K_{2\varepsilon_0} \subset\subset \Omega$ . 令  $\tilde{f} = f \cdot \chi_{K_{\varepsilon_0}}$ . 对  $\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , 令  $\tilde{f}_\varepsilon = J_\varepsilon \tilde{f}$ ,  $f_\varepsilon = J_\varepsilon f$ . 于是在  $K$  上  $\tilde{f}_\varepsilon = f_\varepsilon$ . 并且  $\tilde{f}_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\text{supp } \tilde{f}_\varepsilon \subset K_{\varepsilon_0+\varepsilon} \subset K_{2\varepsilon_0}$ .

当  $0 < |\alpha| \leq k$  时, 首先观察到

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \tilde{f}_\varepsilon(x) &= \int_\Omega \tilde{f}(y) \partial_x^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y) dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{f}(y) \partial_y^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y) dy. \end{aligned}$$

其次由分部积分公式 (Green 公式) 得到

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{f}(y) \partial_y^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y) dy = \int_{\Omega} \partial_y^\alpha \tilde{f}(y) \varphi_\varepsilon(x-y) dy.$$

于是对任意  $x \in K$ , 有

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha \tilde{f}_\varepsilon(x) - \partial_x^\alpha f(x)| &= \left| \int_{\Omega} (\partial_y^\alpha \tilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)) \varphi_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\partial_y^\alpha \tilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)| \varphi_\varepsilon(x-y) dy \\ &\leq \sup_{y \in \overline{B}(x, \varepsilon)} |\partial_y^\alpha \tilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)| \\ &= \sup_{y \in \overline{B}(x, \varepsilon)} |\partial_y^\alpha f(y) - \partial_x^\alpha f(x)|. \end{aligned}$$

由  $f$  的  $k$  阶连续性知右式趋于 0 ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$  时). 从而在  $K$  上  $\partial_x^\alpha \tilde{f}_\varepsilon = \partial_x^\alpha f_\varepsilon$  一致收敛到  $\partial_x^\alpha f$ . □

### § 1.3 截断函数

#### 定理 1.3.1 (截断函数)

设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  为开集,  $K \subset\subset \Omega$ . 则存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得  $K_{2\varepsilon_0} \subset\subset \Omega$ , 以及  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\varphi \geq 0$ , 并满足

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_{\varepsilon_0} \\ 0, & x \notin K_{2\varepsilon_0} \end{cases}$$

则称  $\varphi$  为  $K$  的截断函数.

**证明** 设  $g = \chi_{K_{\varepsilon_0}}$ . 对任意  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , 令  $\varphi = J_\varepsilon g$ . 于是  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , 且满足要求的条件. □

#### 注解

对于上面得到的截断函数  $\varphi$ , 我们可以对  $|\partial_x^\alpha \varphi|$  作上界估计:

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha \varphi(x)| &= \left| \partial_x^\alpha \int g(y) \frac{1}{c\varepsilon^n} j_1\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \right| \\
&\leq \frac{1}{c\varepsilon^n} \int \left| \partial_x^\alpha j_1\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right| dy \\
&\leq \frac{1}{c\varepsilon^n} \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} \int \left| (\partial_z^\alpha j_1)\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right| dy \\
&= \frac{1}{c\varepsilon^n} \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} \int |\partial_z^\alpha j_1(z)| \varepsilon^n dz \\
&= \frac{M(\alpha)}{\varepsilon^{|\alpha|}}.
\end{aligned}$$

## § 1.4 单位分解

### 定理 1.4.1

$A$  有开覆盖  $\mathcal{O} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , 则必存在一族  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  函数  $\Phi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , 使得:

1.  $\varphi_\alpha \in [0, 1]$ .
2.  $\forall x \in A$ , 存在邻域  $V$ , 使得在  $V$  上只有有限个  $\varphi_\alpha$  非零 (即只有有限个  $\alpha \in I$  使  $\text{supp } \varphi_\alpha \cap V \neq \emptyset$ ). 该性质在点集拓扑中称为  $\{\text{supp } \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  局部有限.
3.  $\forall x \in A, \sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(x) = 1$ .
4.  $\forall \alpha \in I, \text{supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$ .

称这样的函数族  $\Phi$  为  $A$  的从属于开覆盖  $\mathcal{O}$  的单位分解.

**证明** 先对紧集证明, 其次对上升紧集列证明, 再对一般开集证明, 最后对一般集合证明.

(1) 当  $A$  为紧集, 则可不妨设  $\mathcal{O} = \{U_j\}_{j \leq N}$  为有限开覆盖. 下先用归纳法证存在一系列开集

$\{W_j\}$  也为  $A$  的开覆盖, 且  $W_j \subset \subset U_j$ .

令  $C_1 = A \setminus \left( \bigcup_{j=2}^n U_j \right)$ , 因  $C_1$  闭而  $U_1$  开, 故  $C_1 \subset \subset U_1$ . 由于度量空间是正规的, 故存在

开集  $W_1, C_1 \subset \subset W_1 \subset \subset U_1$ .

设  $W_1, \dots, W_k$  已构造好. 令  $C_{k+1} = A \setminus \left( \bigcup_{i \leq k} W_i \cup \bigcup_{j \geq i+2} U_j \right)$ . 则  $C_{k+1}$  闭, 且

$C_{k+1} \subset \subset U_{k+1}$ . 故存在  $W_{k+1}$  开,  $C_{k+1} \subset \subset W_{k+1} \subset \subset U_{k+1}$ . 由归纳得到所求的  $\{W_j\}_{j \leq N}$ .

由上一定理, 对每个  $W_j$ , 存在  $\varepsilon_{j0} > 0$ , 及函数  $\psi_j \in C_0^\infty(U_j)$ , 使得  $\psi_j \geq 0$  且

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in W_j \\ 0, & x \notin (W_j)_{2\varepsilon_{j0}} \end{cases}$$

再令  $\varphi_j = \frac{\psi_j}{\sum_{j=1}^N \psi_j}$ , 不难验证  $\{\varphi_j\}$  满足所要求的性质.

(2) 当  $A = \bigcup_{j>0} A_j$ , 其中  $\{A_j\}$  为紧包含上升紧集列 (即有  $A_j \subset \subset A_{j+1}$ ). 对任意  $j > 2$ , 显然

$A_j \setminus A_{j-1}^\circ$  为紧集, 并且含于开集  $A_{j+1}^\circ \setminus A_{j-2}$ . 令

$$\mathcal{O}_j = \{U_\alpha \cap (A_{j+1}^\circ \setminus A_{j-2}) : \alpha \in I\}$$

为  $A_j \setminus A_{j-1}^\circ$  的开覆盖. 于是用 (1) 的结论, 存在关于  $A_j \setminus A_{j-1}^\circ$  的从属于  $\mathcal{O}_j$  的单位分解  $\Phi_j = \{\varphi_{j,\alpha}\}_{\alpha \in I}$ . 当  $j = 2$  则对  $A_2$  用 (1). 最后令

$$\Phi = \left\{ \frac{\varphi_{j\alpha}}{\sum_{j'>0} \sum_{\alpha' \in I} \varphi_{j'\alpha'}} : j \in \mathbb{N}, \alpha \in I \right\}$$

可以验证该函数族满足所需性质.

(3) 当  $A$  为一般开集. 欲构造紧集族  $\{A_j\}$  满足 (2) 中条件. 只需令

$$A_j = \left\{ x \in A : \|x\| \leq j, d(x, \partial A) \geq \frac{1}{j} \right\},$$

于是  $A = \bigcup_{j>0} A_j$ , 后同 (2).

(4) 当  $A$  为一般集合. 令  $B = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ , 再对  $B$  用 (3) 结论, 得到的函数族显然也是  $A$  的单位分解.

□

**例** 推广的 Leibniz 公式: 设  $f, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . 算子  $P(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ , 其中  $a_\alpha \in$

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . 则

$$P(\varphi f) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} \partial_x^\beta \varphi P^{(\beta)}(x, \partial_x) f.$$

其中记号  $P^{(\beta)}(\xi) = \partial_\xi^\beta P(\xi)$ .

## § 1.5 广义函数基本定义

### 定义 1.5.1 (广义函数)

基本函数空间上的连续线性泛函称为广义函数. 拆解这条定义如下:

1. 基本函数空间 (也称试验函数): 通常是由满足一些附加条件 (如支集紧或快速衰减) 的光滑函数构成, 并且赋予了一定收敛性的函数空间. 例:  $C_0^\infty(\Omega)$  紧支集光滑函数,

$C^\infty(\Omega)$  光滑函数,  $\mathcal{S}(\Omega)$  (迅速下降空间或称 Schwartz 空间). 本课程中主要讨论的是  $C_0^\infty(\Omega)$ , 并在其上赋予上节所述的收敛性后称为  $\mathcal{D}(\Omega)$  空间.

2. 泛函: 一个从函数空间到实数集的映射. 其像  $f(\varphi)$  常记为  $\langle f, \varphi \rangle$ .

3. (实)线性:  $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , 有

$$\langle f, c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \rangle = c_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + c_2 \langle f, \varphi_2 \rangle.$$

4. 连续: 若  $\varphi_j \rightarrow 0$  (在  $C_0^\infty(\Omega)$  中), 则  $\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow 0$  (在  $\mathbb{R}$  中).

### 定义 1.5.2

记  $C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$  上广义函数全体为  $\mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $C^\infty(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$  上广义函数全体为  $\mathcal{E}'(\Omega)$ ,  $\mathcal{S}(\Omega)$  上广义函数全体称为  $\mathcal{S}'(\Omega)$  (称为缓增广义函数).

对于  $\mathcal{D}(\Omega)$  上广义函数的连续性有一个等价表述.

### 定理 1.5.3 ( $\mathcal{C}(\Omega)$ 上线性泛函的连续)

$\mathcal{D}(\Omega)$  上的线性泛函  $f$  连续 (按照上述定义) 的等价表述是: 对任意紧的  $K \subset \Omega$ , 必存在  $c \in \mathbb{R}$  与  $k \in \mathbb{N}$ , 使得

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |D^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K).$$

**证明** 分别用 (1) 和 (2) 来表示两种表述. (2)  $\Rightarrow$  (1): 设  $\{\varphi_j\}$  在  $\mathcal{D}(\Omega)$  中趋于 0, 则由定义知有紧集  $K \subset \Omega$ , 使得  $\forall j, \text{supp } \varphi_j \subset K$ , 且对任意固定的  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , 当  $j \rightarrow \infty$  时  $\partial_x^\alpha \varphi_j$  一致趋于 0. 于是由定义 (2) 的条件, 存在  $c \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ , 使得

$$|\langle f, \varphi_j \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial_x^\alpha \varphi_j| \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

从而  $\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow 0$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2): 使用反证法, 设有紧集  $K \subset \Omega$ , 对  $\forall c \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{N}, \exists \varphi \in C_0^\infty(K)$  使得  $|\langle f, \varphi \rangle| > c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial_x^\alpha \varphi|$ . 取  $c = k = 1, 2, \dots$ , 可以得到一系列  $\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty(K)$  使得

$$|\langle f, \varphi_k \rangle| > k \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial_x^\alpha \varphi_k|.$$

令  $\psi_j = \frac{\varphi_j}{|\langle f, \varphi_j \rangle|} \in C_0^\infty(K)$ . 于是有

$$\frac{1}{k} > \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial_x^\alpha \psi_k|.$$

于是对任意固定  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , 当  $k$  充分大时, 有

$$\sup_K |\partial_x^\alpha \psi_k| \leq \sum_{|\beta| \leq k} \sup |\partial_x^\beta \psi_k| < \frac{1}{k},$$

这表明  $\partial_x^\alpha \psi_k$  当  $k \rightarrow \infty$  时一致趋于 0, 这即表明在  $\mathcal{D}$  中有  $\psi_k \rightarrow 0$ . 由定义 (1) 的条件知  $\langle f, \psi_k \rangle \rightarrow 0$ . 这与  $\langle f, \psi_k \rangle \equiv 1$  矛盾.  $\square$

**例** 若  $f$  在  $\Omega$  内任一紧集  $K$  上可积, 则称  $f$  局部可积. 记  $L_{\text{loc}}(\Omega)$  为上述函数之空间. 设  $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , 定义泛函

$$l(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi \, dx$$

可以证明如此定义的  $l$  满足广义函数的定义. 我们仍把  $l$  用  $f$  来记. 这样就可以将  $L_{\text{loc}}(\Omega)$  视为  $\mathcal{D}'(\Omega)$  的一个子空间, 而称这类广义函数为正则广义函数, 其余的称为奇异广义函数.

**例** 对任意  $\varphi$  定义  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ , 不难证明  $\delta$  满足广义函数的定义.

## § 1.6 广义函数基本运算

以上广义函数集合需赋予运算后才成为空间.

### 定义 1.6.1 (广义为 0)

$f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , 若  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , 有  $\langle f, \varphi \rangle = 0$ , 则称  $f$  在  $\Omega$  上为 0.

### 定义 1.6.2 (广义相等)

$f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . 若  $f_1 - f_2$  在  $\Omega$  上为 0, 则称  $f_1, f_2$  在  $\Omega$  上广义相等.

### 定义 1.6.3 (广义函数的支集)

$f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , 称

$$\text{supp } f = \Omega \setminus \bigcup \{O \subset \Omega : O \text{ 为开集且 } f \text{ 在 } O \text{ 上为 } 0\}$$

为  $f$  的支集 (即使  $f$  为 0 的最大的开集的余集).

### 注解

对  $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ , 以上的定义分别等价于可测函数的几乎处处为 0, 几乎处处相等, 和平常的紧集定义相同. 对  $C^k(\Omega)$ , 则为逐点为 0, 逐点相等, 和平常的紧集定义相同.

#### 定义 1.6.4 (广义函数的限制)

设  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $U \subset \Omega$  为开集. 对任意  $u \in C_0^\infty(U)$ , 将其零延拓后视作  $C_0^\infty(\Omega)$  中的试验函数, 则  $f$  自然地作用在  $u$  上而成为  $C_0^\infty(U)$  上的泛函, 连续性和线性性也是不难验证的. 记  $f|_U : C_0^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$  为  $f$  在  $U$  上的限制.

#### 定理 1.6.5 (局部化原理)

设  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . 则

1. 若  $f|_\Omega = 0$ , 则任意开子集  $U \subset \Omega$ ,  $f|_U = 0$ .
2.  $\{U_\alpha\}$  为  $\Omega$  开覆盖, 且  $\forall \alpha, f|_{U_\alpha} = 0$ , 则  $f|_\Omega = 0$ .

#### 证明

1. 由限制的定义, 显然.
2. 对任意  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , 由于  $\text{supp } \varphi \subset \subset \Omega$ , 故存在  $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$  为  $\text{supp } \varphi$  的有限开覆盖.

由单位分解知存在函数族  $\{\psi_k\}_{k=1}^n$  满足  $\text{supp } \psi_k \subset \subset U_{\alpha_k}$ , 且  $\sum_{k=1}^n \psi_k = 1$ . 于是记  $\varphi_k = \varphi \psi_k$ , 则  $\text{supp } \varphi_k \subset \subset U_{\alpha_k}$ . 由于  $f|_{U_{\alpha_k}} = 0$ , 于是  $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$ , 于是  $\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \sum_k \varphi_k \rangle = \sum_k \langle f, \varphi_k \rangle = 0$ . 这即表明  $f$  在  $\Omega$  上为 0.

□

以下定义的出发点通常是为了与正则广义函数的情形兼容.

#### 定义 1.6.6 (线性运算)

对  $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , 定义

$$\langle c_1 f_1 + c_2 f_2, \varphi \rangle = c_1 \langle f_1, \varphi \rangle + c_2 \langle f_2, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

#### 定义 1.6.7 (平移运算)

对  $\forall a \in \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , 定义

$$\langle f(x-a), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x+a) \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

#### 定义 1.6.8 (相似变换)

对任意  $c \neq 0, f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , 定义

$$\langle f(cx), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|c|^n} \left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x}{c}\right) \right\rangle.$$

注解

若  $f(cx) = |c|^\lambda f(x)$ , 则称  $f$  为  $\lambda$  阶齐次广义函数.

记  $\check{f}(x) = f(-x)$  为函数  $f$  的反射. 易验证

$$\langle \check{f}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle.$$

定义 1.6.9 (微分运算)

设  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , 定义

$$\langle \partial_{x_j} f, \varphi \rangle = -\langle f, \partial_{x_j} \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

注解

由该定义不难验证对任意  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , 有

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

定义 1.6.10 (乘子运算)

设  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . 定义

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

称  $a$  为一个  $\mathcal{D}'(\Omega)$  乘子,  $(a \cdot) : f \mapsto af$  称为乘子运算.

**例** 设  $P(x, \partial_x)$  为一个  $C^\infty$  系数的线性偏微分算子, 即

$$P(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha, \quad a_\alpha \in C^\infty(\Omega).$$

设  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , 则

$$\langle P(x, \partial_x)u, \varphi \rangle = \langle u, {}^tP(x, \partial_x)\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

其中

$${}^tP(x, \partial_x)(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha (a_\alpha \cdot \xi)$$

称为  $P$  的转置算子.

**证明** 懒得写了. □

**例** 简单计算可得

1.  $x\delta(x) = 0$ ,
2.  $\sin x \cdot \delta(x) = 0$ ,

3.  $\cos x \cdot \delta(x) = \delta(x)$ .

例 对  $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ , 由上述微分的定义不难得到

$$\langle H'(x), \varphi(x) \rangle = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

对于多元情形请参见第二次作业.

### 定义 1.6.11 (极限运算)

设  $\{f_j\} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . 定义  $f_j \rightarrow f$  在  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  中成立, 即指

$$\langle f_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

这即泛函分析中的弱 \* 收敛.

### 定理 1.6.12

若在  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  中,  $f_j \rightarrow f$ , 则  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ ,

$$\partial^\alpha f_j \rightarrow \partial^\alpha f.$$

例 令  $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & |x| < \varepsilon \end{cases}$ . 则  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  时  $f_\varepsilon$  的逐点极限为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

广义函数 ( $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  中) 极限为  $\delta$ .

例 磨光核的广义函数 ( $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  中) 极限为  $\delta$ .

以下是一个常用于构造  $\delta$  函数的定理.

### 定理 1.6.13

若  $\{f_n\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$  满足: 对  $\forall M > 0, \exists c > 0, \forall a, b$  满足  $-M < a < b < M$  有

$$\left| \int_a^b f_n dx \right| \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

以及

$$\lim_n \int_a^b f_n dx = \begin{cases} 0 & a, b \text{ 同号} \\ 1 & a < 0 < b \end{cases}$$

则  $f_n \rightarrow \delta$  于  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  中.

**证明** 令  $F_n(x) = \int_{-1}^x f_n(y) dy$ , 由第一个条件知  $F_n$  在任意有界区间上一致有界. 由第二个条件知  $\lim F_n = H$  为一维 Heaviside 函数. 故由控制收敛定理

$$\begin{aligned}\lim_n \langle F_n, \varphi \rangle &= \int_{\text{supp } \varphi} \lim_n F_n \cdot \varphi dx \\ &= \langle H, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

于是  $\langle f_n, \varphi \rangle = \langle F_n', \varphi \rangle = -\langle F_n, \varphi' \rangle \rightarrow -\langle H, \varphi' \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$ . □

一下为一些物理学常用的  $\delta$  函数定义.

**例** 可以对下列函数验证上述定理来证明其广义函数极限为  $\delta$  函数.

- $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 x^2 + 1}, n \rightarrow \infty$
- $f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\}, t \rightarrow 0^+$
- $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}, n \rightarrow \infty$
- 磨光核函数

#### 定义 1.6.14 (奇支集)

使  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  为一个  $C^\infty$  函数的最大开集  $\Omega_1$  的余集称为  $u$  的奇支集, 记为  $\text{sing supp } u$ .

由定义可得  $\text{sing supp } u$  为闭集, 且  $\text{sing supp } u \subset \text{supp } u$ , 这是因为使得  $u$  为 0 的开集也使得它为光滑函数.